

# 基于分形几何模型的图象放大

徐晓刚 欧宗瑛 王秀娟

(大连理工大学, CAD&CG 所, 大连 116024)

**摘要** 鉴于自然物体图象具有分形特性, 提出一种基于分形几何原理的放大图象的处理方法, 它通过提取图象的分形参数, 采用了随机中点位移法进行插值, 运行实例表明该方法的放大效果良好。

**关键词** 分形, 放大

## 1 引言

一般的图象放大算法是把原图象的像素点逐个放大为与原像素相同颜色的小矩形, 再由这些小矩形组成放大后的图象。这样放大的结果引起了锯齿状, 破坏了原图的光顺连续的几何关系, 使放大图象失真, 特别是在高倍放大时。为此, 为得到平滑的放大图象, 必须进行插值, 一般的插值是利用周围的点进行计算。分形几何学理论为我们研究和处理图象提供了新的理论原理。自然界实际物体的几何图象遵循分形几何变化规律, 即具有相似的与尺度比例无关的无限细节结构, 当分形图象放大绘制时, 图象会展示出新的更小的细节结构, 不同比例的细节结构服从分形相似规律。基于上述原理, 可以利用分形理论从图象的局部乃至全图找出绘制对象内蕴的分形参数, 利用这些参量, 采用随机中点位移法进行插值, 可以在放大图象中生成新的细节, 从而达到放大图象的效果。

## 2 图象的分形特征

传统的欧氏几何在描述复杂、不规则的自然景物表面形状时遇到了很大的困难, 无法用数学语言阐述自然界中大量无规律, 无限变化的自然现象。分形几何学的出现则开创了描述复杂的自然现象的一

条新途径。分形的意思是细片、破碎、分数、分级等。分形是描述不规则几何形态的有力工具。B. B. Mandelbrot 提出了用分形维数这一概念来描述复杂多变的自然现象, 并提出了分数布朗运动的概念, 把布朗运动推广到更广阔的领域, 使具有统计自相似性特征的一类自然现象有了基本的描述方法, 大大拓宽了人们研究自然的视野。自然界中许多物体都具有分形特征, 如花草、山脉、烟云等。利用分形技术模拟自然景观是当前分形研究的一大热点, 而且在这一领域已取得相当的成果。同理, 对一张从自然界获得的图象, 其各像素亮度的分布同样具有分形的特征。A. P. Pentland 证明了的大多数自然景物的表面所映射成的图象满足分形布朗随机场模型, 并将它作为自然景物图象纹理分析与综合的一种模型<sup>[1]</sup>。分形的一个基本特征是能够表现物体的精细结构, 如果能够提取图象的分形参量, 利用这些参量就可以达到在任意分辨率下生成逼真图象的目的, 也就实现了图象的平滑放大效果。

**定义:**  $I(X)$  为一随机函数, 如果

$$Pr\left(\frac{I(X + \Delta X) - I(X)}{\|\Delta X\|^H} < y\right) = F(y) \quad (1)$$

则称  $I(X)$  为分形布朗随机函数。式中,  $X$  为一维或多维向量;  $\Delta X$  为向量变化量;  $F(y)$  为具有零均值的高斯随机分布函数;  $Pr(\cdot)$  为概率测试;  $\|\cdot\|$  为范数;  $H$  为分形参数。

图象放大处理中引用了如下图象的分形性质:

(1) 图象的分维数与实际景物的分维数值相同。

(2) 图象的分维数在不同的变换比例下保持不变。

实际的图象并不是理想的分形,因此其分形的特征只在一定的尺度下保持不变,但仍然可以利用这些特征来实现放大。根据图象的分形模型,有

$$E(|\Delta I_{\Delta X}|) \|\Delta X\|^{-H} = E(|\Delta I_{\Delta X-1}|) \quad (2)$$

其中  $E(|\Delta I_{\Delta X}|)$  是空间距离为  $\Delta X$  的象素亮度差的期望值。对一图象,如果能够得到稳定的  $H$  值,则可认为此图象是分形的。在式(2)中,两边取对数,有

$$\lg E[|I_{X+\Delta X} - I_X|] = H \lg \|\Delta X\| + \lg E[|I_{X+1} - I_X|] \quad (3)$$

用最小二乘法拟合数据点对  $\{\lg E[|I_{X+\Delta X} - I_X|], \lg \|\Delta X\|\}$ , 则由拟合直线的斜率可得  $H$  值的估计。象素亮度差  $\Delta I = I(x_1, y_1) - I(x_2, y_2)$ ,  $I(x_1, y_1)$ ,  $I(x_2, y_2)$  为象素点亮度,空间距离  $\Delta X =$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

虽然分形布朗随机场模型,可以作为自然景物图象的描述模型,但由于实际的自然景物只是近似地满足分形特性,而且只是在一定的尺度范围内满足分形特性,这个尺度范围称为无标度区间,因此在应用此模型时,应确定无标度区间。无标度区间的确定可以通过统计并拟合数据点对  $\{\lg E[|I_{X+\Delta X} - I_X|], \lg \|\Delta X\|\}$ , 观察其线性变化部份而得出。

Pentland 的研究表明分数布朗随机场模型的统计特性在小尺度范围内与实际的自然景物图象的统计特性吻合得较好,因此,在应用时,可设定窗口,在小尺度范围内计算其参数值。

### 3 放大算法

设定小窗口  $M \times M$ , 对原图进行分割并计算各窗口的  $H$  值。放大算法的本质是在图象中增加点,在放大的图象中若能保持象素点间亮度的几何关系,也就达到了平滑的目的,因此必须对增加点的亮度根据已知点进行计算。首先,按相应于放大比例的距离,将原图象象素点亮度写入放大图象中;然后,按分形几何关系,在已知象素点之间增添新的象素点。在计算增加的象素点亮度值时,采用随机中点位移法。即取相邻 4 已知点,计算放大图象中 4 点的中心,公式如下:

$$I(x, y) = (I(x-sl, y-sl) + I(x+sl, y-sl) + I(x-sl, y+sl) + I(x+sl, y+sl)) / 4 + \Delta I$$

$$\Delta I = \sqrt{1 - 2^{2H-2}} H \sigma G \quad (4)$$

式中  $I(x, y)$  为增加点;  $sl$  为放大倍数的  $1/2$ 。  $sl$  为整型数时,  $I(x, y)$  为图象点;  $sl$  为非整型数时,  $I(x, y)$  作为下一循环的计算点;  $\sigma$  为象素亮度差的均方差;  $G$  为 Gauss 随机变量,服从  $N(0, 1)$  分布。

遍历图象,以后每循环一次,  $\Delta I$  的值乘以系数  $i/2^H$ , 再计算周围 4 点的中心,直至填满图象数据点。

算法如下:

(1) 初始化。从图象开始点起,  $p^* = 0$ , 设定小窗口  $M \times M$ , 放大倍数  $scale$ , 计算各图块  $H_i$ , 把原图象的点按对应关系写入放大图象中;

(2) 在放大图象中取相邻 4 点, 选取相应的原有图象的  $H$  值, 按式(4)计算中点亮度, 若中点坐标为放大后图象的点, 写入; 反之, 存放于数组, 作为下次计算点;

(3)  $p^*$  到图象尾了吗? 是, 转(4); 否, 转(5);

(4) 填满图象点了吗? 是, 转(7); 否, 转(6);

(5)  $p^*++$ ; 转(2);

(6)  $\Delta I$  的值乘以系数  $1/2^H$ ,  $p^* = 0$ , 转(2);

(7) 结束

对于彩色图象, 可认为彩色图象的各个基色分量也服从分形布朗随机场模型。将每象素的颜色按基色 RGB 分解, 按上述方法, 对 RGB 各个分量进行分别计算, 放大, 最后合成得到放大后的图象。

### 4 实验结果

采用本文的算法, 对多种图象进行了验证, 取得了较好的效果。消除了锯齿状, 视觉平滑, 色彩基本上与原图一致。对于树, 花, 纹理等一类具有较强分形特征的图象, 其放大效果较理想, 达到视觉无失真的效果。对于灰度分布较连续的图象, 本算法的效果也很好。对分形特征不明显的灰度图象, 在其一些边缘部份, 会产生一定程度的模糊, 在增加滤波处理后, 效果得到改善。为检验算法的有效性, 特与 3 次插值法进行对比, 结果如图 1~3。



图 1 原图



图2 用本文方法放大4倍



图3 三次插值法放大4倍

### 参考文献

- 1 Pentland A P. Fractal-based description of natural scenes. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984. 6(6): 661~673.
- 2 Barnsley Michael F. The Science of Fractal Images. 和风译. 北京: 海洋出版社, 1995.



**徐晓刚** 1976年生, 博士生, 1996年进入大连理工大学机械系攻读博士学位, 研究方向: 图象图形处理。



**欧宗瑛** 1973年生, 大连理工大学CAD&CG所所长, 博士生导师, 长期从事CAD及图象图形处理方面的工作。

**王秀娟** 1971年生, 博士, 研究方向, 图象图形处理。

## Enlarged Image Based On Fractal Geometry Model

Xu Xiaogang, Ou Zongying, Wang Xiujuan  
(CAD&CG Center, DUT, Dalian 116024)

**Abstract** This paper deals with an approach for enlarging an image based on fractal geometry model. It extracts the fractal factor from a picture first, and then the random middle point offsetting is used to add more points for interpolation. The case study shows that the enlarged image quality using this new approach is very good.

**Keywords** Fractal, Enlarge

## 欢迎订阅《系统仿真学报》双月刊

邮发代号: 82-9

《系统仿真学报》是中国系统仿真学会会刊、国家一级刊物, 是中国科技论文统计用刊, 并被中国学术期刊(光盘版)全文数据库、中国导弹与航天天文数据库、美国《工程索引》(EI)检索数据库等收录。

欢迎订阅, 欢迎投稿, 欢迎刊登广告, 欢迎索取样刊  
地址: 北京市海淀区永定路50号, 北京142-213分箱  
邮编: 100854 电话 68388709 联系人: 马京莲